Taller para prepara parcial 2

1. Suponga que $f(x)$ es una función derivables, para $g(x) = xf(x^2)$ encuentre $g''(x)$ en términos de $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$.

2. Suponga que $f(x)$ es una función tal que $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$ para todo número real x, y. Suponga también que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, encuentre

   (a) $f(0)$. (b) $f'(0)$. (c) $f'(x)$.

3. Suponga que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{ax - b} & x > 0 \\ bx^2 + 1 & x \le 0 \end{cases}$. Para que valor de a y b la función resulta derivable en todo $\mathbb{R}$

4. Suponga que $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \le a \\ x^2 & x > a \end{cases}$. Para que valor de a la función resulta derivable en todo $\mathbb{R}$

5. Suponga que $f(x)$ es una función tal que $|f(x)| \le x^2$, para todo x. Usando la definición de derivada muestre que $f'(0)$.

6. Suponga que $f(x) = \tan^{-1}(x) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$. Calcular el valor del límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

7. Muestre que si f es par. Entonces $f'(x)$ es impar.

8. Hallar $f'(x)$ en cada caso y simplifique al máximo su respuesta.

   (a) $f(x) = \sin\left((x+1)(x-2)^2\right)$.
   (b) $f(x) = \sin(x \sin x) + \cos(\sin x^2)$.
   (c) $f(x) = \dfrac{\sin x^2 \sin^2 x}{1 + \sin x}$.
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x - \dfrac{2}{1 + \tan x}}$.
   (e) $f(x) = e^{\sec\left(\frac{1}{\sin x}\right)}$.
   (f) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{\tan x}}}$.
   (g) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$
   (h) $f(x) = \dfrac{x^3 \ln x}{(x+3)^4}$
   (i) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.
   (j) $f(x) = \ln(x + \ln(x + \ln(2x+1)))$.
   (k) $f(x) = (x^4 + 1)e^{\tan^{-1}(x^2)}$.

9. Determine los puntos para los cuales la recta tangente es horizontal.

   (a) $f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x}) - \ln\sqrt{1-x}$ (b) $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \sqrt{x}$

10. Muestre que $f'(x) = 4\tan^{-1}\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{4\sqrt{x}}\right)$ para $f(x) = (4x+1)\tan^{-1}\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{4\sqrt{x}}\right) - 2x^2 + 1$.

11. Muestre que $f'(x) = \dfrac{4}{4x^2+1}$ para $f(x) = \sec^{-1}\left(x + \dfrac{1}{4x}\right)$.

12. En cada caso halle una formula para calcular $f^{(n)}(x)$ para cualquier n.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.

(b) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

(c) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$.

(e) $f(x) = x \ln x$.

(f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

(g) $f(x) = \dfrac{1-\tan x}{\sec x}$

13. Muestre que $f'(x) = \dfrac{x}{f(x)}$ y $f''(x) = \dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{x^2}{(f(x))^3}$, para $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

14. Para $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, hallar $f''(x)$.

15. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $x^y = y^x$ en el punto $(1,\ 1)$.

16. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $(\ln x)^{\ln y} = (\ln y)^{\ln x}$ en el punto $(e,\ e)$.

17. Decimos que un número a es raíz doble de una función polinomial $f(x)$ si $f(x) = (x-a)^2 g(x)$. Muestre que a es raíz doble de $f(x)$ si se cumple que $f(a) = f'(a) = 0$. análogamente si se tiene que $f(a) = f'(a) = 0$ y $f''(a) \neq 0$, muestre que a es raíz doble de $f(x)$.

18. Dibujar la gráfica de la cúbica $f(x) = x - x^3$ en el intervalo cerrado $-2 \leq x \leq 2$.
    (a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 0)$.
    (b) Halle los puntos sobre la curva para los cuales la tangente es horizontal.
    (c) Halle los puntos sobre la curva para los cuales la recta tangente es paralela a la recta $y = x$.

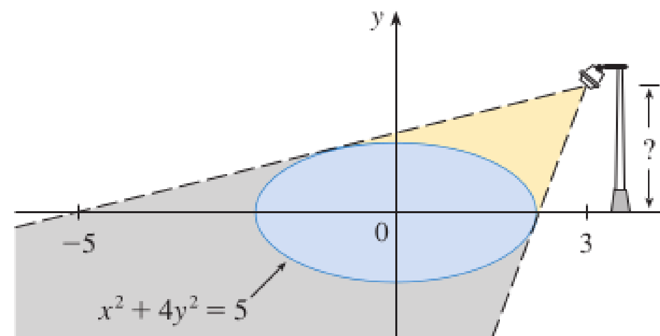
19. Muestre que la curva $x^3 + y^3 = 6xy$ tiene dos rectas tangentes en el punto $(0,\ 0)$.

20. Muestre que en la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ hay dos puntos con la misma pendiente $m = \frac{1}{2}$ para su recta tangente.

21. *En la figura se muestra una lámpara colocada tres unidades hacia la derecha del eje y, y una sombra creada por la región elíptica*

$$x^2 + 4y^2 \leq 5$$

.Si el punto $(-5,\ 0)$ está en el borde de la sombra, ¿Qué tan alta es la lámpara?



22. Encuentre los puntos sobre la curva $x + y^2 = -1$ para los cuales la recta tangente pasa por $(1,\ 0)$.

23. Encuentre todos los puntos sobre la curva $x^2 + y^2 = 2$ para los cuales la recta tangente tiene pendiente igual a 1.

24. Cuando un plato circular de metal se está calentando en un horno, su radio aumenta a razón de $0.01 cm/min$. ¿A qué razón aumenta el área del plato cuando su radio mide $50 cm$?

25. La longitud l de un rectángulo está decreciendo a razón de $1cm/seg$ mientras que su ancho, w, está creciendo a razón de $3/2cm/seg$. Si $l = 12cm$ y $w = 5cm$, encuentre las razones de cambio del área, del perímetro, y de las longitudes de las diagonales del rectángulo. ¿Cuáles de estas magnitudes están creciendo y cuáles están decreciendo?

26. Un globo se eleva verticalmente desde una superficie plana, a una razón constante de $1pie/seg$. Justo cuando el globo está a $65pies$ sobre dicha superficie, una bicicleta se mueve a una velocidad constante de $17pies/seg$ y debajo de él. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia $s(t)$ entre la bicicleta y el globo $3s$ después?

27. Un topógrafo, parado a $30pies$ de la base de un edificio, mide un ángulo de elevación de $75°$ desde la parte superior del edificio. ¿Con qué exactitud debe medirse el ángulo para que el porcentaje de error al estimar la altura del edificio sea menor a 4%?

28. El mecánico de la Automotriz está volviendo a perforar un cilindro de 6 pulgadas de profundidad para poner un pistón nuevo. La máquina que están usando incrementa el radio del cilindro una milésima de pulgada cada 3 minutos. ¿Qué tan rápido aumenta el volumen del cilindro cuando la perforación (diámetro) mide 3.800 pulgadas?

Ejercicios interesantes que no entran en el parcial 2

Ejercicio 1 (Para pensar)**.** *Suponga que* $f(x) = a\sin x + b\sin(2x)$ *y* $|f(x)| \leq |\sin x|$ *para toda* $x \in \mathbb{R}$. *Muestre que*

$$|a + 2b| \leq 1$$

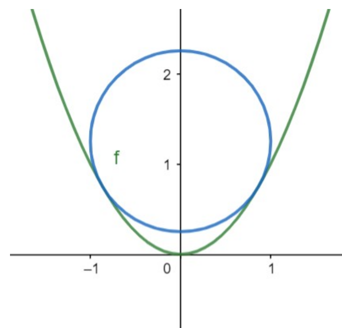
(Ayuda: Use el teorema del valor intermedio en el intervalo $[0, x]$ ***para llegar a la siguiente ecuación para algún*** c ***en el intervalo*** $(0, x)$***.***

$$a\cos x + 2b\cos(2x) = \frac{f(0) - f(x)}{x} = -\frac{f(x)}{x}$$

Use la hipótesis de que $|f(x)| \leq |\sin x|$ ***junto con el límite*** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ***y concluya).***

Ejercicio 2 (Para pensar)**.** *Encuentre los puntos sobre las curvas* $y = x^3 - 3x + 4$ *y* $y = 3x^2 - 3x$ *para los cuales la recta tangente es la misma.*

Determine el centro de la circunferencia si se sabe que su radio es uno y es tangente a la función $f(x) = x^2$*, como muestra la figura.*



Ayuda.

1. ***La ecuación dela circunferencia debe ser de la forma*** $x^2 + (y - k)^2 = 1$***.***

2. ***Por ser tangentes la pendientes deben ser iguales, use este hecho para llegar a que*** $y = -\dfrac{1}{2} + k$***.***

3. ***La componente en*** y ***del punto de tangencia es*** $y = -\dfrac{1}{2} + k$***, use el hecho de que en ese punto la parábola y la circunferencia tiene el mismo valor en*** y ***y en*** x ***para llegar a que*** $k = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$***.***

Ejercicio 3. *Muestre que si* $f(x)$ *es derivable en todo punto, entonces*

$$2f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

Ejercicio 4. *Hallar* $f'(x)$, $f''(x)$ *y verifique si* $f'''(x)$, *existe para* $f(x) = |x|^3$.